

Инновационный курс  
«Теория некооперативных игр в экономике» (64 часа)

**Аннотация**

Обязательный курс для магистров 2-го года, обучающихся по программе "Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности".

Читается в 3-м семестре.

Лекции 32 часа.

Самостоятельная работа 32 часа.

Зачет и экзамен в 3-м семестре.

За курс отвечает кафедра исследования операций.

Авторы программы: профессор Васин А.А., доцент Морозов В.В.

Лектор 2006/07 уч. года: доцент Морозов В.В.

**Содержание курса**

*Введение.* Конфликтные ситуации в сфере экономики. Способы их разрешения. Роль концепции равновесия.

*Антагонистические игры.* Определение игры и ее решения. Седловые точки. Необходимые и достаточные условия их существования. Метод поиска. Матричные игры.

Решение в смешанных стратегиях. Реализация смешанных стратегий в виде физических смесей. Пример игры «фермер-природа». Игра с выбором вида депозитного вклада. Методы решения матричных игр. Доминирование стратегий. Графический метод решения матричных игр. Сведение к паре двойственных задач линейного программирования.

Игры с полной информацией. Графическая интерпретация. Дерево игры. Метод динамического программирования для поиска оптимальных стратегий.

*Иерархические игры двух лиц.* Игра «центр-производитель» с назначением цен на продукцию. Игра «центр-производитель» со стимулированием выпуска продукции.

Равновесие по Штакельбергу. Пример с благожелательным партнером по бизнесу.

*Концепции равновесия.* Равновесие по Нэшу. Пример дуополии Курно. Построение функций наилучших ответов. Сравнение равновесия по Нэшу и Штакельбергу в модели Курно.

Биматричные игры. Пример игры по контролю качества продукции. Доминирование стратегий. Графический метод поиска смешанных равновесий по Нэшу.

*Задачи оптимального распределения ресурсов.* Принцип уравнивания. Задача минимизации максимального ущерба. Задача оптимизации относительной страховой надбавки.

Задача максимизации суммарного эффекта. Задача оптимизации прибыли от капиталовложений. Лемма Гиббса. Метод поиска оптимального распределения ресурса.

Критерий Гросса для задачи распределения штучного ресурса. Алгоритм решения. Игра распределения ресурсов с иерархическим вектором интересов игроков.

### Распределение часов курса по темам и видам работ

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего (часов)	Лекции (часов)	Самостоятельная работа
1	Антагонистические игры	24	12	12
2	Иерархические игры	12	6	6
3	Концепции равновесия	12	6	6
4	Задачи оптимального распределения ресурсов	18	8	8
	ИТОГО	64	32	32

### Список литературы

- [1] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.
- [2] Васин А.А. Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС-Пресс, 2005.
- [3] Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
- [4] Давыдов Э.Г. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1990.
- [5] Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

### Список вопросов, выносимый на экзамен

1. Теорема о необходимом и достаточном условии существования седловой точки. Метод поиска седловых точек .
2. Теорема существования седловой точки у вогнуто-выпуклой функции.
3. Основная теорема матричных игр.
4. Теоремы о доминировании строк и столбцов в матричных играх.
5. Графический метод решения матричных игр вида  $2 \times n$  и  $m \times 2$  .
6. Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.
7. Теорема Цермело о решении многошаговой игры с полной информацией.
8. Теорема существования ситуаций равновесия для игры двух лиц.
9. Метод поиска ситуаций равновесия с использованием функций наилучших ответов.
10. Модель дуополии Курно.
11. Свойства ситуаций равновесия в смешанных стратегиях биматричных игр.
12. Решение биматричных игр в смешанных стратегиях.
13. Решение иерархической игры Г1.
14. Принцип уравнивания для задачи оптимального распределения ресурса.
15. Условия оптимальности и алгоритм для задачи дискретного максимина.
16. Задача оптимизации суммарной эффективности.
17. Дискретная задача оптимизации суммарной эффективности.
18. Решение иерархической игры Г2.

19. Игровая задача распределения ресурсов.  
20. Равновесие по Штакельбергу.

**Конспект лекций**  
**«Теория некооперативных игр в экономике»**

## §1. Седловые точки и антагонистические игры

Пусть функция  $F(x, y)$  определена на декартовом произведении  $X \times Y$ , где  $X, Y$  — множества произвольной природы.

*Определение.* Пара  $(x^0, y^0) \in X \times Y$  называется *седловой точкой*<sup>1</sup> функции  $F(x, y)$  на  $X \times Y$ , если

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y \quad (1.1)$$

или, эквивалентно,

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y).$$

Понятие седловой точки используется в определении решения антагонистической игры.

Опишем антагонистическую игру. В ней принимают участие два игрока 1 и 2 (первый и второй). Игрок 1 выбирает стратегию  $x$  из множества стратегий  $X$ , игрок 2 выбирает стратегию  $y$  из множества стратегий  $Y$ . *Нормальная форма* игры подразумевает, что каждый игрок выбирает свою стратегию независимо, не зная выбора партнера. Задана *функция выигрыша*  $F(x, y)$  первого игрока, определенная на  $X \times Y$ . Выигрыш  $F(x, y)$  первого игрока является проигрышем для второго. Цель первого игрока состоит в увеличении своего выигрыша  $F(x, y)$ , а цель второго — в уменьшении  $F(x, y)$ .

Таким образом, антагонистическая игра задается набором  $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ .

Вернемся к определению седловой точки, которой можно придать следующий игровой смысл. Если игроки выбрали в качестве стратегий компоненты  $x^0, y^0$  седловой точки, то каждому из них невыгодно отклоняться от выбранной стратегии. Поэтому седловая точка является формализацией концепции равновесия в игре.

*Определение.* Говорят, что антагонистическая игра  $\Gamma$  имеет *решение*, если функция  $F(x, y)$  имеет на  $X \times Y$  седловую точку. Пусть  $(x^0, y^0)$  — седловая точка функции  $F(x, y)$ . Тогда тройка  $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0))$  называется *решением* игры,  $x^0, y^0$  — *оптимальными* стратегиями игроков, а  $v$  — *значением* игры.

Важнейший класс антагонистических игр образуют матричные игры.

*Определение.* Антагонистическая игра  $\Gamma$  называется *матричной*, если множества стратегий игроков конечны:  $X = \{1, \dots, m\}$ ,  $Y = \{1, \dots, n\}$ . При этом принято обозначать стратегию первого игрока через  $i$ , стратегию второго через  $j$ , а выигрыш первого  $F(i, j)$  через  $a_{ij}$ . Матрица  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  называется *матрицей* игры. Первый игрок выбирает в ней номер строки  $i$ , а второй — номер столбца  $j$ .

<sup>1</sup>Термин «седловая точка» заимствован из аналитической геометрии. Например, в  $E^3$  поверхность  $z + x^2 - y^2 = 0$  имеет седловую точку в начале координат.

В обозначениях матричной игры  $(i^0, j^0)$  – седловая точка матрицы  $A$ , если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0} \leq a_{i^0j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Иначе говоря, элемент матрицы  $a_{i^0j^0}$  является минимальным в  $i^0$ -й строке и максимальным в  $j^0$ -м столбце.

*Пример 1.1.*  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Здесь (1,1) и (2,1) – две седловые точки и значение игры  $v$  равно нулю. Заметим, что  $a_{12} = v$ , но (1,2) не является седловой точкой матрицы.

*Пример 1.2.* Игра «орлянка». Первый игрок закладывает монету орлом (о) или решкой (р), а второй пытается отгадать. Если второй игрок отгадает, то первый платит ему единицу, если не отгадает, то – наоборот. Здесь

$$A = \begin{matrix} & \text{о} & \text{р} \\ \text{о} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{р} & \end{matrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта матрица не имеет седловой точки.

Вернемся к общему определению седловой точки и антагонистической игры. Возникают два вопроса. Когда антагонистическая игра имеет решение, т.е. когда функция  $F(x, y)$  имеет седловую точку на  $X \times Y$ ? Как искать седловые точки, если известно, что они существуют?

Рассмотрим игру  $\Gamma$  с точки зрения первого игрока. Пусть он выбрал стратегию  $x$ . Ясно, что его выигрыш будет не меньше, чем  $\inf_{y \in Y} F(x, y)$ . Величину  $\inf_{y \in Y} F(x, y)$  назовем *гарантированным результатом (выигрышем)* для первого игрока, если он использует стратегию  $x$ . Наилучший гарантированный результат для первого игрока  $\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$  называется *нижним значением* игры.

*Определение.* Стратегия  $x^0$  первого игрока называется *максиминной*, если  $\inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$ .

Рассмотрим игру  $\Gamma$  с точки зрения второго игрока. Если он выбрал стратегию  $y$ , то для него естественно считать гарантированным результатом величину  $\sup_{x \in X} F(x, y)$ . Проигрыш второго игрока будет не больше, чем эта величина. Наилучший гарантированный результат для второго игрока  $\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$  называется *верхним значением* игры.

*Определение.* Стратегия  $y^0$  второго игрока называется *минимаксной*, если  $\sup_{x \in X} F(x, y^0) = \bar{v}$ .

*Лемма 1.2.* В любой антагонистической игре  $\Gamma$  справедливо неравенство  $\underline{v} \leq \bar{v}$ .

Теперь сформулируем необходимое и достаточное условие существования седловой точки для функции двух переменных.

**Теорема 1.1.** 1) Для того чтобы функция  $F(x, y)$  на  $X \times Y$  имела седловую точку,

необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y). \quad (1.3)$$

2) Пусть выполнено равенство (1.3). Пара  $(x^0, y^0)$  тогда и только тогда является седловой точкой, когда  $x^0$  — максиминная, а  $y^0$  — минимаксная стратегии игроков.

*Замечание.* Если выполнено равенство (1.3), то множество всех седловых точек прямоугольно и совпадает с  $X^0 \times Y^0$ , где  $X^0$  и  $Y^0$  — множества всех максиминных и минимаксных стратегий игроков.

*Пример 1.3.* Найдем все седловые точки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \min_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max_{1 \leq i \leq 4} a_{ij} \\ 7 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{array}$$

Для удобства вычислений добавим справа от матрицы столбец, содержащий минимальные элементы в каждой строке, а снизу от нее строку, содержащую максимальные элементы в каждом столбце. Отсюда  $\bar{v} = \underline{v} = 2$ ,  $X^0 = \{2, 3\}$ ,  $Y^0 = \{2, 4\}$ . Четыре седловые точки образуют множество  $X^0 \times Y^0$ .

Представляют интерес условия топологического характера, при которых существуют максиминные и минимаксные стратегии.

**Теорема 1.2.** Пусть функция  $F(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ , где  $X, Y$  — компакты метрических пространств<sup>1</sup>. Положим

$$Y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg} \min_{y \in Y} F(x, y).$$

Тогда

1) Функция минимума  $W(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$  непрерывна на  $X$ .

2) Предположим дополнительно, что при каждом  $x \in X$  множество  $Y(x)$  состоит из единственного элемента  $y(x)$ . Тогда отображение  $y(x)$  непрерывно на  $X$ .

*Определение.* Антагонистическая игра  $\Gamma$  называется *непрерывной*, если  $X, Y$  — выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция  $F(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ . В частности, при  $X = [a, b]$ ,  $Y = [c, d]$  будем говорить о непрерывной игре на прямоугольнике.

Из теоремы 1.2 следует, что в непрерывной игре  $\Gamma$  существуют максиминные и минимаксные стратегии игроков.

<sup>1</sup>Читатель, не знакомый с этим понятием, здесь и далее может заменить выражение «компакт метрического пространства» на выражение «замкнутое ограниченное множество евклидова пространства».

Теперь займемся достаточными условиями существования седловой точки функции двух переменных. Их можно сформулировать в терминах выпуклого анализа. Напомним некоторые определения.

*Определение.* Множество  $Z$  евклидова пространства называется *выпуклым*, если для любых точек  $z' \neq z''$  из  $Z$  и любого числа  $0 < \lambda < 1$  точка  $\lambda z' + (1 - \lambda)z''$  также принадлежит множеству  $Z$ .

*Определение.* Функция  $h(z)$ , определенная на выпуклом множестве  $Z$ , называется *выпуклой*, если для любых точек  $z' \neq z''$  из  $Z$  и любого числа  $0 < \lambda < 1$  выполнено неравенство

$$h(\lambda z' + (1 - \lambda)z'') \leq \lambda h(z') + (1 - \lambda)h(z''). \quad (1.4)$$

Если последнее неравенство выполнено как строгое, то функция  $h(z)$  называется *строго выпуклой*. Если вместо неравенства  $\leq$  в (1.4) фигурирует неравенство  $\geq$  ( $>$ ), то функция  $h(z)$  называется *вогнутой (строго вогнутой)*.

По теореме П2.6 функция  $\sum_{i=1}^m z_i^2$  строго выпукла. Справедлив также следующий факт.

*Лемма 1.3.* Строго выпуклая непрерывная функция на выпуклом компакте<sup>1</sup> евклидова пространства достигает минимума в единственной точке.

**Теорема 1.3.** Пусть  $X \subset E^m$  и  $Y \subset E^n$  – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция  $F(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ . Предположим, что при любом  $y \in Y$  функция  $F(x, y)$  вогнута по  $x$  и при любом  $x \in X$  она выпукла по  $y$ . Тогда функция  $F(x, y)$  имеет на  $X \times Y$  седловую точку.

## §2. Смешанные расширения антагонистических игр

В предыдущем параграфе приводился пример антагонистической игры, не имеющей решения («орлянка»). Играть в подобные игры весьма непросто. Проигравшему игроку каждый раз хочется сменить свою стратегию, но он будет бояться это сделать (а вдруг партнер догадается?). Теория игр предлагает игрокам использовать *смешанные* стратегии.

*Определение.* Смешанной стратегией первого игрока в игре  $\Gamma$  называется вероятностное распределение  $\varphi$  на множестве стратегий  $X$ .

Для первого игрока применить смешанную стратегию  $\varphi$  – это выбрать стратегию  $x \in X$  как реализацию случайной величины, имеющей закон распределения  $\varphi$ . Далее рассматриваются три вида смешанных стратегий.

1) Пусть  $X = \{1, \dots, m\}$ , как это имеет место в матричной игре. Тогда вместо  $\varphi$  для обозначения смешанной стратегии будем использовать «вероятностный» вектор  $p = (p_1, \dots, p_m)$ , удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если применяется вектор  $p$ , то стратегия  $i$  выбирается с вероятностью  $p_i$ . Например, в

<sup>1</sup>Замкнутом ограниченном множестве.

игре «орлянка» опытные игроки используют смешанную стратегию  $p^0 = (1/2, 1/2)$ , подбрасывая монету и выбирая «орел» или «решку» в зависимости результата бросания.

2) Пусть  $X = [a, b]$ , как это имеет место в непрерывной игре на прямоугольнике. Здесь смешанная стратегия – функция распределения  $\varphi$  на отрезке  $[a, b]$ , т.е. определенная на прямой неубывающая непрерывная справа функция, удовлетворяющая условиям:  $\varphi(x) = 0$ , если  $x < a$ ,  $\varphi(x) = 1$ , если  $x \geq b$ .

При использовании смешанной стратегии  $\varphi$  стратегия  $x$  выбирается как реализация случайной величины  $\xi$ , для которой вероятность осуществления события  $\{\xi \leq x\}$  равна  $\varphi(x)$  при любом  $x$ .

3) Пусть  $X$  – выпуклый компакт евклидова пространства. Здесь смешанными стратегиями являются вероятностные меры на  $X$ .

Примером смешанной стратегии может служить вероятностная мера, сосредоточенная в конечном числе точек:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}(x), \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad x^{(i)} \in X, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$I_{x^{(i)}}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^{(i)}, \\ 0, & x \neq x^{(i)}. \end{cases}$$

Интеграл от непрерывной функции  $h(x)$  по рассматриваемой мере имеет вид:

$$\int_X h(x) d\varphi(x) = \sum_{i=1}^m p_i h(x^{(i)}).$$

Обозначим через  $\{\varphi\}$  – множество всех смешанных стратегий первого игрока на множестве  $X$ . Можно считать, что  $X \subset \{\varphi\}$ . Действительно, в последнем случае стратегию  $x$  можно отождествить с вероятностной мерой  $I_x$ . Если множество  $X$  конечно, то выбор стратегии  $i$  эквивалентен выбору смешанной стратегии  $p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единица стоит на  $i$ -м месте, а при  $X = [a, b]$  стратегию  $x \in [a, b]$  можно отождествить с функцией распределения, имеющей скачок 1 в точке  $x$ .

Множество  $X$  будем называть множеством *чистых* стратегий первого игрока (в противовес смешанным).

Займемся построением *смешанного расширения* антагонистической игры  $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ . Мы определили множество  $\{\varphi\}$  смешанных стратегий первого игрока. Аналогично, пусть  $\{\psi\}$  – множество смешанных стратегий второго игрока, т.е. вероятностных распределений  $\psi$  на множестве  $Y$  его чистых стратегий. При заданных стратегиях  $\varphi$  и  $\psi$  математическое ожидание выигрыша первого игрока определяется формулой

$$F(\varphi, \psi) = \int_X \int_Y F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y).$$

Здесь предполагается, что двойной интеграл существует.

*Определение.* Антагонистическая игра

$$\bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$$

называется смешанным расширением игры  $\Gamma$ .

*Определение.* Решение  $(\varphi^0, \psi^0, v = F(\varphi^0, \psi^0))$  игры  $\bar{\Gamma}$  называется решением исходной игры  $\Gamma$  в смешанных стратегиях. При этом  $\varphi^0, \psi^0$  называются *оптимальными смешанными* стратегиями игроков, а  $v$  – *значением* игры  $\Gamma$ .

Далее будут построены смешанные расширения матричных и непрерывных игр и будет показано, что эти игры всегда имеют решение в смешанных стратегиях.

Напомним, что матричная игра  $\Gamma$  задается  $m \times n$ -матрицей  $A = (a_{ij})$ . Множество смешанных стратегий первого игрока –

$$P = \{p = (p_1, \dots, p_m) \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\},$$

множество смешанных стратегий второго игрока –

$$Q = \{q = (q_1, \dots, q_n) \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\},$$

а математическое ожидание выигрыша первого игрока –

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j.$$

Таким образом,  $\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$  – смешанное расширение матричной игры  $\Gamma$ .

**Теорема 2.1 (Основная теорема матричных игр).** Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

*Доказательство.* Достаточно доказать, что функция  $A(p, q)$  имеет седловую точку на  $P \times Q$ . Множества  $P, Q$  – многогранники евклидовых пространств, а функция  $A(p, q)$  билинейна и поэтому непрерывна на  $P \times Q$ , вогнута по  $p$  и выпукла по  $q$ . По теореме 1.3 функция  $A(p, q)$  имеет на  $P \times Q$  седловую точку. ■

Отметим типичные случаи, когда применяются смешанные стратегии.

1) Игра повторяется много раз. В этом случае за большое число повторений игры средний выигрыш первого игрока, использующего оптимальную смешанную стратегию  $p^0$ , будет близок к значению игры или будет превышать его.

2) Смешанная стратегия реализуется в виде «физической смеси» чистых стратегий. Что это означает, поясним на примерах.

*Пример 2.2.* Игра против природы. Фермер (игрок 1) имеет участок земли, который можно засеять тремя сельскохозяйственными культурами: пшеницей, кукурузой и овсом. Год может быть нормальным, засушливым и дождливым (это три стратегии игрока 2 – природы). Пусть  $H = (h_{ij})_{3 \times 3}$  – матрица урожайности, а  $b_i$  – цена за единицу продукции  $i$ -го вида. Тогда  $A = (b_i h_{ij})_{3 \times 3}$  – матрица игры, где выигрыш фермера – стоимость произведенной продукции. Пусть  $p^0 = (1/2, 1/4, 1/4)$  – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Реализовать ее можно, засеяв половину участка пшеницей, а оставшиеся две четверти – кукурузой и овсом. Здесь фермер фактически расширяет свое множество

чистых стратегий: оно состоит из всевозможных способов разбиения участка земли на три прямоугольных участка — по одному для каждой культуры.

Займемся смешанным расширением непрерывной игры  $\Gamma$ . Ограничимся игрой на прямоугольнике  $X \times Y = [a, b] \times [c, d]$ . При заданных стратегиях  $\varphi$  и  $\psi$  — функциях распределения на отрезках  $X$  и  $Y$  — ожидаемый выигрыш  $F(\varphi, \psi)$  первого игрока равен

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y).$$

Итак, построено смешанное расширение  $\bar{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$  непрерывной игры  $\Gamma$  на прямоугольнике.

### §3. Свойства решений в смешанных стратегиях

В данном параграфе рассматриваются свойства решений в смешанных стратегиях матричных игр и непрерывных игр на прямоугольнике. Эти свойства в частных случаях позволяют находить оптимальные смешанные стратегии.

**Теорема 3.1.** Для непрерывной игры  $\Gamma$  на прямоугольнике справедливы следующие два утверждения:

- 1)  $\inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min_{y \in Y} F(\varphi, y)$  для любой стратегии  $\varphi \in \{\varphi\}$ ;
- 2)  $\sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max_{x \in X} F(x, \psi)$  для любой стратегии  $\psi \in \{\psi\}$ .

Заметим, что теорема 3.1 справедлива и для произвольных непрерывных игр.

*Следствие 1.* Значение  $v$  непрерывной игры  $\Gamma$  на прямоугольнике может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi).$$

*Следствие 2.* Для того чтобы тройка  $(\varphi^0, \psi^0, v)$  была решением в смешанных стратегиях непрерывной игры  $\Gamma$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x, \psi^0) \leq v \leq F(\varphi^0, y) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y. \quad (*)$$

**Теорема 3.1'.** Для игры с матрицей  $A$  справедливы следующие два утверждения:

- 1)  $\min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j)$  для любой стратегии  $p \in P$ ;
- 2)  $\max_{p \in P} A(p, q) = \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q)$  для любой стратегии  $q \in Q$ .

*Следствие 1.* Значение  $v$  игры с матрицей  $A$  может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q).$$

*Следствие 2.* Для того чтобы тройка  $(p^0, q^0, v)$  была решением в смешанных стратегиях игры с матрицей  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$A(i, q^0) \leq v \leq A(p^0, j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Теорему 3.1' и ее следствия докажите самостоятельно.

Отметим, что проверка выполнения условия (\*) из следствия 2 теоремы 3.1' сводится к подсчету скалярных произведений

$$A(p^0, j) = \sum_{i=1}^m p_i^0 a_{ij}$$

вектора  $p^0$  на столбцы, а также скалярных произведений

$$A(i, q^0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0$$

вектора  $q^0$  на строки матрицы  $A$  и сравнению их с числом  $v$ .

*Пример 3.1.* Пусть матрица игры – циклическая:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_n & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & \dots & c_n & c_1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что  $p^0 = q^0 = (1/n, \dots, 1/n)$ ,  $v = \sum_{k=1}^n c_k/n$  – решение игры в смешанных стратегиях. Действительно, условие (\*) здесь выполнено, поскольку все неравенства в нем выполнены как равенства. В частности,  $p^0 = q^0 = (1/2, 1/2)$ ,  $v = 0$  – решение игры «орлянка».

**Теорема 3.2' (Свойство дополняющей нежесткости).**

Пусть  $(p^0, q^0, v)$  – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей  $A$ . Тогда

- 1)  $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v$ ;
- 2)  $q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = v$ .

*Следствие.* Пусть  $(p^0, q^0, v)$  – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей  $A$ . Тогда

- 1)  $A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^0 = 0$ ;
- 2)  $A(p^0, j) > v \Rightarrow q_j^0 = 0$ .

Поясним выражение «дополняющая нежесткость», заимствованное из теории двойственности линейного программирования. Поставим в соответствие неравенству  $A(i, q^0) \leq v$  ( $A(p^0, j) \geq v$ ) из условия (\*) неравенство  $p_i^0 \geq 0$  ( $q_j^0 \geq 0$ ) с тем же номером. Тогда если одно из этих неравенств выполнено строго («нежестко»), то по теореме 3.2' и ее следствию соответствующее неравенство выполнено как равенство («жестко»). Все это можно записать в следующей краткой форме: для решения  $(p^0, q^0, v)$  в смешанных стратегиях игры с матрицей  $A$  справедливы равенства

$$p_i^0(v - A(i, q^0)) = q_j^0(A(p^0, j) - v) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

*Пример 3.2.* Решим игру с диагональной матрицей  $A$ , в которой диагональные элементы  $a_i > 0$ . Предположим, что все компоненты оптимальных смешанных стратегий  $p^0, q^0$

положительны. Тогда по теореме 3.2'

$$A(i, q^0) = a_i q_i^0 = v, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n q_i^0 = 1.$$

Решая эту систему относительно  $n + 1$  неизвестных  $q_i^0, i = 1, \dots, n, v$ , получим  $q_i^0 = v/a_i, i = 1, \dots, n$ , где

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

Аналогично можно найти, что  $p^0 = q^0$ .

#### §4. Методы решения матричных игр

В этом параграфе изложены некоторые методы решения матричных игр в смешанных стратегиях. При этом наша цель будет состоять в поиске хотя бы одного решения игры.

##### 1. Доминирование строк и столбцов.

Если элементы некоторой строки  $i_1$  матрицы  $A$  меньше соответствующих элементов другой строки  $i_2$ , то интуитивно ясно, что строку  $i_1$  первому игроку можно не использовать. Сформулируем условия доминирования строк и столбцов матрицы игры, позволяющие уменьшить ее размеры.

*Определение.* Будем говорить, что вектор  $a = (a_1, \dots, a_l)$  слабо доминирует вектор  $b = (b_1, \dots, b_l)$ , если  $a_i \geq b_i, i = 1, \dots, l$ . Будем говорить о *строгом доминировании*, если все нестрогие неравенства  $\geq$  заменены на строгие  $>$ . Заметим, что слабое доминирование возможно даже в случае равенства векторов  $a$  и  $b$ .

*Определение.* Для векторов  $a^{(i)}, i = 1, \dots, m$ , евклидова пространства и чисел  $p_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m p_i = 1$ , линейная комбинация  $\sum_{i=1}^m p_i a^{(i)}$  называется *выпуклой комбинацией* векторов  $a^{(i)}$  с коэффициентами  $p_i$ .

**Теорема 4.1 (О доминировании строк).** Пусть некоторая строка матрицы  $A$  слабо доминируется выпуклой комбинацией остальных строк. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Если указанное доминирование строгое, то эта строка входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Доминируемые строки можно вычеркнуть из матрицы игры.

Отметим, что при исключении строго доминируемых строк оптимальные смешанные стратегии первого игрока сохраняются. При слабом доминировании оптимальные стратегии могут теряться. В качестве примера достаточно рассмотреть матрицу игры с равными элементами.

Следующую теорему докажите самостоятельно.

**Теорема 4.1' (О доминировании столбцов).** Пусть некоторый столбец матрицы  $A$  слабо доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию

второго игрока. Если указанное доминирование строгое, то этот столбец входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Доминирующие столбцы можно вычеркнуть из матрицы игры.

*Пример 4.1.* Решить игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь полусумма первых двух строк слабо доминирует третью строку и ее можно вычеркнуть. В полученной матрице третий столбец слабо доминирует второй. После его вычеркивания получим циклическую матрицу

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

с решением игры  $(\hat{p}, \hat{q}, v) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2), 2)$ . Поэтому исходная игра имеет решение  $(p^0, q^0, v) = ((1/2, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0), 2)$ .

II. *Графический метод решения игр с матрицами размеров  $2 \times n$  и  $m \times 2$ .*

Рассмотрим игру с  $2 \times n$ -матрицей  $A$ . Смешанная стратегия первого игрока  $p = (p_1, 1 - p_1)$  определяется величиной  $p_1 \in [0, 1]$ . Значение игры, согласно следствию теоремы 3.2', представимо в виде

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \min_{1 \leq j \leq n} [a_{1j}p_1 + a_{2j}(1 - p_1)].$$

Для нахождения значения игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока достаточно на отрезке  $[0, 1]$  построить графики семейства линейных функций  $l_j(p_1) = a_{1j}p_1 + a_{2j}(1 - p_1)$  с угловыми коэффициентами  $k_j = a_{1j} - a_{2j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и найти точку максимума  $p_1^0$  функции  $\min_{1 \leq j \leq n} l_j(p_1)$  – нижней огибающей семейства (рис. 4.1).

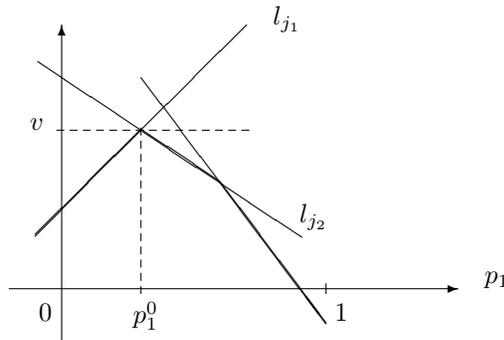


Рис. 4.1

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Разберем следующие возможности.

а)  $0 < p_1^0 < 1$ .

Этот случай представлен на рис. 4.1. Возьмем две прямые  $l_{j_1}$  и  $l_{j_2}$ , проходящие через точку  $(p_1^0, v)$  и имеющие угловые коэффициенты  $k_{j_1} \geq 0$ ,  $k_{j_2} \leq 0$ . Рассмотрим уравнение

$$k_{j_1}q^* + k_{j_2}(1 - q^*) = 0. \quad (4.2)$$

Оно имеет решение  $q^*$ , принадлежащее отрезку  $[0,1]$ . Из (4.2) следует, что угловой коэффициент прямой  $l_{j_1}(p_1)q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*)$  равен нулю. Смешанная стратегия второго игрока

$$q^0 : q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j = j_1, \\ 1 - q^*, & j = j_2, \\ 0, & j \neq j_1, j_2, \end{cases}$$

оптимальна, поскольку при всех  $p_1 \in [0, 1]$

$$A(p, q^0) = l_{j_1}(p_1)q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*) = v.$$

б)  $p_1^0 = 0$ .

В этом случае чистая стратегия 2 первого игрока является оптимальной. У второго игрока также имеется чистая оптимальная стратегия.

в)  $p_1^0 = 1$ .

В этом случае, аналогичном б), матрица игры также имеет седловую точку.

*Пример 4.2.* Решим игру с матрицей  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

Построив три прямые (рис. 4.2)

$$l_1(p_1) = (-1)p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - 3p_1,$$

$$l_2(p_1) = (-2)p_1 + 4(1 - p_1) = 4 - 6p_1,$$

$$l_3(p_1) = 3p_1 + 1(1 - p_1) = 1 + 2p_1,$$

найдем, что максимум нижней огибающей достигается в  $p_1^0 = 1/5$  — точке пересечения прямых  $l_1$  и  $l_3$ .

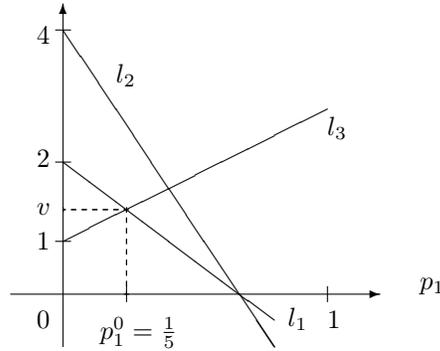


Рис. 4.2

Значение игры  $v = l_1(p_1^0) = 7/5$  и  $p^0 = (1/5, 4/5)$ . Здесь  $j_1 = 3$ ,  $k_3 = 2$ ,  $j_2 = 1$ ,  $k_1 = -3$ . Из уравнения  $2q^* + (-3)(1 - q^*) = 0$  находим  $q^* = 3/5$ . Отсюда  $q^0 = (2/5, 0, 3/5)$  — оптимальная стратегия второго игрока. Сделайте проверку условия (\*) следствия 2 теоремы 3.1' для найденного решения  $(p^0, q^0, v)$ .

Теперь рассмотрим игру с  $m \times 2$ -матрицей  $A$ . Смешанная стратегия  $q = (q_1, 1 - q_1)$  второго игрока определяется величиной  $q_1 \in [0, 1]$ . Значение игры, согласно следствию теоремы 3.2', представимо в виде

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \min_{0 \leq q_1 \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} [a_{i1}q_1 + a_{i2}(1 - q_1)].$$

Поэтому необходимо построить верхнюю огибающую  $\max_{1 \leq i \leq m} l_i(q_1)$  семейства прямых  $l_i(q_1) = a_{i1}q_1 + a_{i2}(1 - q_1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и найти на отрезке  $[0, 1]$  точку  $q_1^0$  ее минимума. Она будет соответствовать оптимальной смешанной стратегии второго игрока. Оптимальная стратегия первого игрока строится с использованием уравнения, аналогичного (4.2).

III. *Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.*

Сведение решения матричной игры к задачам линейного программирования – наиболее эффективный прием, позволяющий использовать алгоритм *симплекс-метода*.

Без потери общности будем предполагать, что значение матричной игры  $v$  положительно. Согласно следствию теоремы 3.2', оно представимо в виде

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m p_i a_{ij}.$$

Введем вспомогательную переменную  $u$  и запишем задачу нахождения максимина как задачу линейного программирования

$$v = \max_{(u, p) \in B} u, \text{ где}$$

$$B = \{(u, p) \mid \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq u, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Действительно, при фиксированном  $p \in P$  максимальное значение  $u$  при ограничениях  $(u, p) \in B$  равно  $\min_{1 \leq j \leq n} A(p, j)$ .

Поскольку  $v > 0$ , можно считать, что  $u$  принимает положительные значения. Сделаем замену переменных  $z_i = p_i/u$ ,  $z = (z_1, \dots, z_m)$ . Тогда, учитывая ограничения  $(u, p) \in B$ , получим

$$\sum_{i=1}^m z_i = 1/u, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \geq 1, j = 1, \dots, n, \quad z_i \geq 0, i = 1, \dots, m.$$

Отсюда

$$v = \max_{(u, p) \in B} u = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z_i^0},$$

где  $z^0$  – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (I)$$

По  $z^0$  находим значение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока:  $v = 1 / \sum_{i=1}^m z_i^0$ ,  $p^0 = v z^0$ .

Аналогично можно получить, что

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j^0},$$

где  $w^0$  – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (II)$$

Здесь  $q^0 = v w^0$  – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Задачи (I) и (II) двойственны одна по отношению к другой.

## § 5. Многошаговые антагонистические игры

Определим многошаговую антагонистическую игру с *полной информацией*. Игра происходит в течение  $T$  шагов с номерами  $t = 1, \dots, T$ . На каждом шаге  $t$  игроки выбирают по очереди альтернативы – значения переменных  $x_t, y_t$ .

Шаг 1. Сначала первый игрок выбирает альтернативу  $x_1 \in U_1$ , затем второй игрок, зная выбор первого, выбирает альтернативу  $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$ .

Пусть игроки в течение  $t - 1$  шагов выбрали альтернативы  $x_1, \dots, x_{t-1}, y_1, \dots, y_{t-1}$ . Положим  $\bar{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$ ,  $\bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$ .

Шаг  $t$ . Сначала первый игрок, зная предысторию  $\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}$ , выбирает альтернативу  $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$ . Затем второй игрок выбирает альтернативу  $y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) = V_t(\cdot)$ , зная предысторию  $\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}$ , включая выбор  $x_t$  первого игрока на данном шаге.

После завершения шага  $T$  возникает пара  $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ , называемая *партией* игры. По смыслу партия игры – это запись всех альтернатив, выбранных игроками. Для любой партии  $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$  задается выигрыш  $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$  первого игрока.

Определим теперь игру в нормальной форме. На шаге  $t$  первый игрок может выбрать альтернативу  $x_t$  как значение функции  $\tilde{x}_t : x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ , которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов  $\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}$ . Обозначим множество всех таких функций  $\tilde{x}_t$  через  $\tilde{U}_t$ . Заметим, что  $\tilde{x}_1 = x_1$ , поскольку на первом шаге первый игрок никакой информацией не располагает.

Стратегия первого игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = 1, \dots, T) \in \tilde{X} = \prod_{t=1}^T \tilde{U}_t.$$

Аналогично, на шаге  $t$  второй игрок может выбирать альтернативу  $y_t$  как значение функции  $\tilde{y}_t : y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$ , которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов  $\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}$ . Обозначим множество всех таких функций  $\tilde{y}_t$  через  $\tilde{V}_t$ . Стратегия второго игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = 1, \dots, T) \in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^T \tilde{V}_t.$$

Игроки могут выбрать стратегии  $\tilde{x}, \tilde{y}$  независимо друг от друга до игры, а во время игры — применять их «автоматически» по мере поступления информации. Любой паре стратегий  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  однозначно соответствует партия игры:

$$x_1 = \tilde{x}_1, y_1 = \tilde{y}_1(x_1), x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1) \text{ и т.д.}$$

Положим  $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ , где  $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$  — партия, соответствующая стратегиям  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Итак, многошаговая игра с полной информацией определена в нормальной форме  $\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$ .

В дальнейшем будем рассматривать два класса игр с полной информацией: игра  $\Gamma'$ , в которой все множества  $U_t(\cdot), V_t(\cdot)$  конечны; игра  $\Gamma''$ , в которой все множества  $U_t(\cdot) \equiv U_t, V_t(\cdot) \equiv V_t$  не зависят от предыстории и являются компактами метрических пространств, а функция  $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$  непрерывна на произведении

$$U_1 \times \dots \times U_T \times V_1 \times \dots \times V_T.$$

Определим пару стратегий

$$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0, t = 1, \dots, T), \quad \tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0, t = 1, \dots, T),$$

используя метод динамического программирования. Доопределим функцию  $F$  на всех отрезках партии вида  $(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$  или  $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$  и назовем ее *функцией Беллмана*. Компоненты стратегий  $\tilde{x}_t^0, \tilde{y}_t^0$  будем задавать в порядке, обратном выборам игроков.

Определим сначала  $\tilde{y}_T^0$ . Для этого зафиксируем произвольное значение аргументов  $(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1})$  и зададим значение функции

$$\tilde{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}) \stackrel{\text{def}}{=} y_T^0 :$$

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) \stackrel{\text{def}}{=} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}).$$

Определим функцию  $\tilde{x}_T^0$ . Зафиксируем произвольное значение аргументов  $(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$  и зададим значение функции

$$\tilde{x}_T^0(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) \stackrel{\text{def}}{=} x_T^0 :$$

$$F(\bar{x}_{T-1}, x_T^0, \bar{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}, x_T, \bar{y}_{T-1}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}).$$

Пусть определены компоненты стратегий и значения функции Беллмана

$$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \dots, \tilde{y}_{t+1}^0, \tilde{x}_{t+1}^0, F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}), \dots, F(\bar{x}_t, \bar{y}_t).$$

Тогда  $\tilde{y}_t^0, \tilde{x}_t^0, F(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}), F(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$  задаются по приведенным выше формулам с заменой  $T$  на  $t$ .

Покажем, что стратегии  $\tilde{x}^0$ ,  $\tilde{y}^0$  определены корректно для игр  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ . Действительно, в игре  $\Gamma'$  все множества  $U_t(\cdot)$ ,  $V_t(\cdot)$  конечны и поэтому максимумы и минимумы, фигурирующие в определениях  $\tilde{x}^0$ ,  $\tilde{y}^0$ , достигаются. Аналогичное утверждение справедливо и для игры  $\Gamma''$ , поскольку по теореме 1.2 функция Беллмана непрерывна на соответствующих компактах.

Определим величину

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) \stackrel{\text{def } F(x_1)}{=} \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) = \dots \\ &= \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \dots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T).\end{aligned}$$

Справедлива следующая

**Теорема 5.1 (Цермело).** Всякая многошаговая антагонистическая игра с полной информацией  $\Gamma'$  (или  $\Gamma''$ ) имеет решение  $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \tilde{v})$ .

*Пример 5.1.* Покажем, что шахматная игра имеет решение. Существует такое целое число  $T$ , что в соответствии с правилами игры любая шахматная партия заканчивается не позднее хода  $T$ . Поэтому без потери общности можно считать, все партии продолжаются  $T$  ходов<sup>1</sup>. Шахматы являются игрой вида  $\Gamma'$ . Действительно,  $U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$  является множеством разрешенных правилами альтернативных выборов хода белыми (первым игроком) на  $t$ -м ходу в позиции, определяемой предыдущими ходами игроков  $(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ . Аналогично  $V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$  задается как множество выборов хода черными на  $t$ -м ходу. Выигрыш белых определяется по правилу

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{если выиграли белые,} \\ 0, & \text{если выиграли черные,} \\ 1/2, & \text{если сыграли вничью.} \end{cases}$$

По теореме Цермело шахматная игра имеет решение. Практическое значение этот результат имеет для позиций эндшпиля, где обычно ищут форсированный выигрыш, либо ничью.

*Пример 5.2.* Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Разобьем множество ее строк на подмножества  $M_1 = \{1, 2\}$  и  $M_2 = \{3, 4\}$ , а множество столбцов – на подмножества  $N_1 = \{1, 2\}$  и  $N_2 = \{3, 4\}$ . Определим двухшаговую игру с полной информацией.

Шаг 1. Сначала первый игрок выбирает номер  $\alpha \in \{1, 2\}$  множества  $M_\alpha$ , из которого он будет на втором шаге делать выбор строки матрицы  $A$ . Затем второй игрок, зная  $\alpha$ ,

<sup>1</sup>Если партия заканчивается раньше, то игроки делают необходимое число фиктивных ходов, не влияющих на исход игры.

выбирает номер  $\beta \in \{1, 2\}$  множества  $N_\beta$ , из которого он будет на втором шаге выбирать номер столбца матрицы  $A$ .

Шаг 2. Первый игрок выбирает номер строки  $i \in M_\alpha$ , зная  $\alpha, \beta$ , затем второй игрок выбирает номер столбца  $j \in N_\beta$ , зная  $\alpha, \beta, i$ .

Выигрыш первого игрока равен  $a_{ij}$ .

Для решения задачи воспользуемся *позиционной формой* игры, которую будем отображать на плоскости в виде дерева.

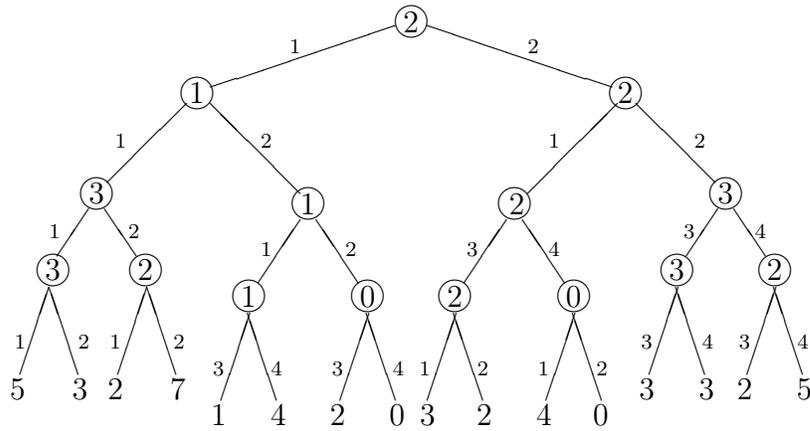


Рис. 5.1

Начальная (корневая) вершина дерева<sup>1</sup> соответствует первому ходу первого игрока (выбор альтернативы  $\alpha$ ), в вершинах второго уровня альтернативу  $\beta$  выбирает второй игрок и т.д. В финальных вершинах, отвечающих различным партиям игры, указаны выигрыши первого игрока  $F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ . В вершинах четвертого уровня указаны значения функции Беллмана  $F(\alpha, \beta, i) = \min_{j \in N_\beta} F(\alpha, \beta, i, j)$ , в вершинах третьего уровня – значения  $F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$ , в вершинах второго уровня – значения  $F(\alpha) = \min_{\beta=1,2} F(\alpha, \beta)$ , а в начальной вершине – значение двухшаговой игры  $\tilde{v} = \max_{\alpha=1,2} F(\alpha) = 2$ .

Укажем оптимальные стратегии игроков

$$\tilde{x}^0 = (\alpha^0, \tilde{i}^0(\alpha, \beta)), \quad \tilde{y}^0 = (\tilde{\beta}^0(\alpha), \tilde{j}^0(\alpha, \beta, i)) :$$

$$\alpha^0 = 2, \quad \tilde{i}^0(2, 1) = 3, \quad \tilde{i}^0(2, 2) = 3, \quad \tilde{\beta}^0(1) = 2, \quad \tilde{\beta}^0(2) = 1,$$

$$\tilde{j}^0(1, 2, 1) = 3, \quad \tilde{j}^0(1, 2, 2) = 4, \quad \tilde{j}^0(2, 1, 3) = \tilde{j}^0(2, 1, 4) = 2.$$

Отметим, что сначала мы подсчитали функцию Беллмана, а затем построили в естественном порядке компоненты оптимальных стратегий. В результате была достигнута некоторая экономия вычислений, поскольку эти компоненты необязательно следует определять при всех значениях аргументов. Например,  $\alpha^0 = 2$  и значения функции  $\tilde{i}^0(\alpha, \beta)$  нужно находить только при  $\alpha = 2$ .

<sup>1</sup>Дерево изображено в перевернутом виде, поскольку так его удобнее рисовать.

## §6. Иерархические игры двух лиц

Понятие антагонистической игры значительно расширить. В конфликтной ситуации с двумя участниками их интересы не всегда противоположны. В качестве модели такого конфликта определим игру двух лиц общего вида.

Пусть первый игрок имеет в своем распоряжении стратегии  $x$  из множества стратегий  $X$ , а второй игрок – стратегии  $y$  из множества стратегий  $Y$ . Рассмотрим игру в *нормальной форме*. В такой игре каждый участник выбирает стратегию, не зная выбора партнера. Пара стратегий  $(x, y)$  называется *ситуацией* игры. Интересы первого игрока характеризует функция выигрыша  $F(x, y)$ , а второго – функция выигрыша  $G(x, y)$ , определенные на множестве всех ситуаций  $X \times Y$ . Каждый игрок стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Таким образом, игра двух лиц в нормальной форме задается совокупностью

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle.$$

Здесь мы рассматриваем игры двух лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , предварительно обмениваются информацией о своих выборах. Такого рода игры описывают взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, центром и производителем продукции и т.п.) и называются *иерархическими*. Будем считать, что первый игрок (лидер, принципал) осуществляет управление вторым игроком (агентом) и делает сообщение первым<sup>1</sup>.

При этом нас будет интересовать наилучший гарантированный результат (выигрыш), который может получить в игре первый игрок. В данном параграфе предполагается, что функции  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  непрерывны на произведении  $X \times Y$  компактов метрических пространств.

Игра  $\Gamma_1$ . Первый игрок выбирает стратегию  $x \in X$  и сообщает ее второму. Затем второй игрок выбирает стратегию  $y \in Y$ , зная  $x$ . При этом будем использовать схематичную запись:  $x \xrightarrow{2} y$ . Смысл подобных сообщений очевиден в тех случаях, когда интересы игроков близки. Например, если вы решили с кем-нибудь встретиться, то сообщаете, куда придете. Игра  $\Gamma_1$  является неантагонистической одношаговой игрой с полной информацией.

Экономическая интерпретация: первый игрок (центр) сообщает второму игроку (производителю продукции) цену  $x$  на продукцию. Второй игрок выпускает продукцию в количестве  $y$ , зная цену  $x$ .

Найдем наилучший гарантированный результат  $F_1$  первого игрока в игре  $\Gamma_1$ . Предположим, что второй игрок, зная  $x$ , выбирает

$$y \in Y(x) = \text{Arg max}_{y \in Y} G(x, y),$$

т.е. максимизирует свою функцию выигрыша  $G(x, y)$ . Первый игрок знает функцию выигрыша второго игрока, ему также известно, что второй будет выбирать стратегию из множества  $Y(x)$ , но он не знает конкретного выбора  $y \in Y(x)$ .

Величина

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

называется *оценкой эффективности* (гарантированным результатом) стратегии  $x$ .

<sup>1</sup>В зарубежной литературе такие игры называют «принципал-агент» (principal-agent).

Заметим, что множество  $Y(x)$  — непустое и является компактом. Следовательно,  $\min_{y \in Y(x)}$  достигается и наилучший гарантированный результат имеет вид:

$$F_1 = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y).$$

*Определение.* Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Стратегия первого игрока  $x^\varepsilon$  называется  $\varepsilon$ -оптимальной в игре  $\Gamma_1$ , если  $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$ .

В дальнейшем мы приведем пример, в котором  $\sup_{x \in X}$  не достигается. Решить игру  $\Gamma_1$  — это значит найти величину  $F_1$  и  $\varepsilon$ -оптимальную стратегию  $x^\varepsilon$  при заданном  $\varepsilon > 0$ .

Игра  $\Gamma_2$ . Первый игрок перед выбором  $x$  имеет полную информацию об  $y$ . Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида  $f : Y \rightarrow X$ . Множество всех таких стратегий обозначим через  $\{f\}$ . Схема сообщений в игре  $\Gamma_2 : f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$ .

Экономическая интерпретация:  $f(y)$  — величина премии, обещаемая центром за произведенную продукцию  $y$ .

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата  $F_2$  первого игрока в игре  $\Gamma_2$ . Предположим, что второй игрок, зная  $f$ , выбирает  $y$  из множества

$$Y(f) = \text{Arg max}_{y \in Y} G(f(y), y).$$

Множество  $Y(f)$  может оказаться пустым, если функция  $f$  разрывна. В случае пустого  $Y(f)$  будем считать, что второй игрок может выбрать любую стратегию  $y \in Y$ .<sup>1</sup> Определим множество

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), & \text{если } Y(f) \neq \emptyset, \\ Y, & \text{если } Y(f) = \emptyset. \end{cases}$$

В сделанных предположениях второй игрок выбирает  $y \in Y^*(f)$ . Оценка эффективности стратегии  $f$  задается формулой

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Наилучший гарантированный результат первого игрока имеет вид

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

*Определение.* Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Стратегия  $f^\varepsilon$  называется  $\varepsilon$ -оптимальной в игре  $\Gamma_2$ , если  $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$ .

Поиск величины  $F_2$  по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций  $\{f\}$ . Мы далее упростим формулу для  $F_2$  таким образом, чтобы оптимизация велась по исходным множествам  $X$  и  $Y$ .

Найдем более простую формулу для  $F_2$ . Положим  $X(y) = \text{Arg max}_{x \in X} F(x, y)$  — множество наилучших ответов первого игрока,  $X^*(y) = \text{Arg max}_{x \in X(y)} G(x, y)$  — множество наилучших ответов первого игрока, благоприятных по отношению ко второму. Определим стратегию первого игрока  $f^* : \forall y \in Y \ f^*(y) \in X^*(y)$ .

<sup>1</sup>Техническое условие, которое можно ослабить, например, предположив, что второй игрок максимизирует функцию  $G(f(y), y)$  с точностью до  $\varepsilon$ .

Нам потребуются следующие величины и множества:

$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$  – наилучший гарантированный результат второго игрока при

условии, что первый применяет по отношению к нему стратегию «наказания»  $f^H$ :

$f^H(y) \in \text{Arg} \min_{x \in X} G(x, y)$  для любого  $y \in Y$ ;

$E = \text{Arg} \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$  – множество максиминных стратегий второго игрока;

$D = \{(x, y) \in X \times Y \mid G(x, y) > G_2\}$ ;

$K = \begin{cases} \sup_{(x, y) \in D} F(x, y), & \text{если } D \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{если } D = \emptyset; \end{cases}$

$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$ .

**Теорема 6.1 (Гермейер).** В сделанных предположениях наилучший гарантированный результат первого игрока в игре  $\Gamma_2$  равен

$$F_2 = \max[K, M].$$

*Пример 6.2.* Решим игры  $\Gamma_1, \Gamma_2$  для игры  $\Gamma$ :

$$X = Y = [0, 1], \quad F(x, y) = 3x/4 + y/2, \quad G(x, y) = (x - y)^2.$$

Игра  $\Gamma_1$ .  $F_1 = \sup_{0 \leq x \leq 1} \min_{y \in Y(x)} (3x/4 + y/2)$ ,

$$Y(x) = \text{Arg} \max_{0 \leq y \leq 1} (x - y)^2 = \begin{cases} \{1\}, & 0 \leq x < 1/2, \\ \{0, 1\}, & x = 1/2, \\ \{0\}, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

График функции  $W(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x/4 + y/2)$  изображен на рис. 6.1.

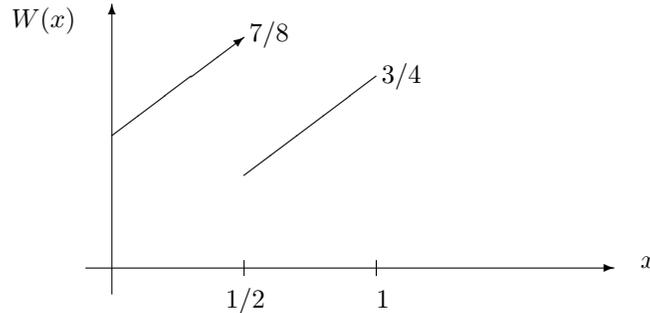


Рис. 6.1

Здесь  $F_1 = 7/8$ ,  $x^\varepsilon = 1/2 - 4\varepsilon/3$  –  $\varepsilon$ -оптимальная стратегия. Отметим, что внешняя верхняя грань в выражении для  $F_1$  не достигается.

Игра  $\Gamma_2$ .  $G_2 = \max_{0 \leq y \leq 1} \min_{0 \leq x \leq 1} (x - y)^2 = 0$ ,  $D = \{(x, y) \mid (x - y)^2 > 0\}$ ,  $K = 5/4 = F_2$ ,

$$(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1 - 4\varepsilon/3, 1), \quad f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon, \\ y, & y \neq y^\varepsilon, \end{cases}$$

–  $\varepsilon$ -оптимальная стратегия.

### Равновесие по Штакельбергу

Определим теперь *равновесие по Штакельбергу* игры  $\Gamma_1$ . Положим  $Y^*(x) = \text{Arg} \max_{y \in Y(x)} F(x, y)$  — множество наилучших ответов второго игрока, благожелательных по отношению к первому.

*Определение.* Ситуация  $(x^0, y^0)$  называется *равновесием по Штакельбергу*, если

$$x^0 \in \text{Arg} \max_{x \in X} \max_{y \in Y(x)} F(x, y), \quad y^0 \in Y^*(x^0).$$

Здесь предполагается, что второй игрок, получив информацию о  $x$ , использует свой наилучший ответ, благожелательный по отношению к первому игроку.

Покажем, что в сделанных предположениях равновесие по Штакельбергу существует. Для этого определим стратегию второго игрока  $g^* : \forall x \in Y \quad g^*(x) \in Y^*(x)$ . По лемме 6.1 функция  $F(x, g^*(x))$  полунепрерывна сверху на  $X$ . Следовательно, она достигает на компакте  $X$  наибольшее значение в некоторой точке  $x^0$ . Тогда при  $y^0 = g^*(x^0)$  ситуация  $(x^0, y^0)$  будет равновесием по Штакельбергу.

### §7. Ситуации равновесия в играх многих лиц

Пусть задано множество  $A$  участников игры, или игроков. Игрок  $a$  имеет в своем распоряжении стратегии  $s^a$  из множества стратегий  $S^a$ . Каждый из игроков выбирает стратегию, не зная выборов партнеров. В результате в игре реализуется набор стратегий

$$s = (s^a, a \in A) \in S = \bigotimes_{a \in A} S^a,$$

называемый *ситуацией*. У каждого игрока  $a$  имеется функция выигрыша  $u^a(s)$ , определенная на множестве ситуаций  $S$ , которую игрок стремится, по возможности, максимизировать. Таким образом, игра многих лиц в нормальной форме задается совокупностью

$$\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle.$$

Важнейшим принципом принятия решений в конфликтных ситуациях является понятие равновесия по Нэшу.

*Определение.* Ситуация  $\bar{s} = (\bar{s}^a, a \in A)$  называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу) игры  $\Gamma$ , если для каждого игрока  $a \in A$

$$\max_{s^a \in S^a} u^a(\bar{s} | s^a) = u^a(\bar{s}).$$

Стратегии  $\bar{s}^a$ , составляющие ситуацию равновесия, будем называть *равновесными*.

Выражение  $\bar{s} | s^a$  читается « $\bar{s}$  при условии  $s^a$ ». Оно обозначает ситуацию, в которой все компоненты, кроме стратегии игрока  $a$ , совпадают с компонентами ситуации  $\bar{s}$ , а стратегия игрока  $a$  есть  $s^a$ . Определение равновесия показывает, что стратегия  $\bar{s}^a$ , входящая в ситуацию  $\bar{s}$ , является оптимальной для игрока  $a$  при фиксированных стратегиях всех остальных игроков. Таким образом, можно сказать, что равновесие по Нэшу — это такая ситуация, от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться индивидуально.

Если в игре двух лиц  $u^2(s^1, s^2) \equiv -u^1(s^1, s^2)$ , то игра  $\Gamma$  – антагонистическая. В ней ситуации равновесия – это седловые точки функции  $u^1(s^1, s^2)$  на  $S^1 \times S^2$ .

В антагонистической игре, имеющей решение, седловая точка обладает следующим свойством: ее компоненты являются максиминной и минимаксной стратегиями игроков и, наоборот, любая пара таких стратегий образует седловую точку. Таким образом, в антагонистической игре принцип равновесия согласуется с принципом оптимизации игроками своих гарантированных результатов. Кроме того, во всех седловых точках выигрыш первого игрока один и тот же и равен значению игры. К сожалению, в общем случае ситуации равновесия не обладают указанными свойствами. Убедимся в этом на примерах. Предварительно введем понятие *биматричной игры*.

*Определение.* Игра двух лиц  $\Gamma$  называется биматричной, если множества стратегий игроков конечны:  $S^1 = \{1, \dots, m\}$ ,  $S^2 = \{1, \dots, n\}$ . Здесь  $i \in S^1$ ,  $j \in S^2$  – стратегии первого и второго игроков. Выигрыши игроков задаются двумя матрицами

$$A = (u^1(i, j))_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (u^2(i, j))_{m \times n} = (b_{ij})_{m \times n}.$$

В обозначениях биматричной игры  $(i^0, j^0)$  – ситуация равновесия, если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0 j^0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad b_{i^0 j} \leq b_{i^0 j^0}, \quad j = 1, \dots, n.$$

*Пример 7.1.* Игра «семейный спор»:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерпретация. Жена и муж (первый и второй игроки) обсуждают вопрос, куда пойти развлечься: на футбол (стратегия 1) или на балет (стратегия 2). Если идут на футбол, то жена получает 1 единицу, а муж – 2 единицы «удовольствия». Если идут на балет, то выигрыш жены – 2, а мужа – 1. Если оба идут в разные места, то выигрыши игроков – нулевые.

В игре существует две ситуации равновесия: (1,1) и (2,2). Первая из них предпочтительней второму игроку, а вторая – первому. Если игроки будут действовать независимо, то первый выберет стратегию 2, а второй – стратегию 1. В результате оба получают по нулю. Поэтому использование ситуаций равновесия на практике часто связывается со следующим сценарием поведения игроков. Они сначала должны договориться о ситуации равновесия, затем всякие переговоры запрещаются и игроки независимо выбирают свои стратегии, возможно нарушая принятое соглашение. Заметим, что одному игроку будет невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии. Если игроки придерживаются в игре такого сценария поведения, то игра  $\Gamma$  называется *бескоалиционной*.

*Пример 7.2.* Игра «дилемма заключенного»:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Интерпретация. Два бандита (игроки 1 и 2), подозреваемые в совершении тяжкого преступления, находятся изолированно друг от друга в предварительном заключении. Ввиду отсутствия прямых улик успех или неуспех обвинения зависит от признания (стратегия

1) или непризнания (стратегия 2) самих бандитов. Если оба бандита признаются (ситуация (1,1)), то они будут признаны виновными и приговорены к 8 годам тюрьмы. Если ни один из них не признается (ситуация (2,2)), то по обвинению в главном преступлении они будут оправданны, но обвинителю все-таки удастся доказать их виновность в некотором сопутствующем менее тяжком преступлении, например, в ношении оружия, в результате чего они будут приговорены к 1 году тюрьмы. Если, наконец, признается только один из них (ситуации (2,1) и (1,2)), то признавшийся будет освобожден (за помощь следствию), а непризнавшийся будет приговорен к отбытию максимального срока – 10 лет.

В этой игре имеется единственная ситуация равновесия (1,1): обоим признаться. Однако есть ситуация (2,2), более выгодная обоим игрокам, но не являющаяся ситуацией равновесия. В связи с этим примером дадим определение ситуации, *оптимальной по Парето*.

*Определение.* Ситуация  $\bar{s}$  игры  $\Gamma$  называется оптимальной по Парето, если не существует такой ситуации  $s$ , что выполнены неравенства  $u^a(s) \geq u^a(\bar{s})$ ,  $a \in A$  и при этом хотя бы одно из них – строгое.

В примере 7.2 ситуация равновесия не является оптимальной по Парето.

В двух разобранных примерах равновесные стратегии игроков были максиминными (проверьте!). Следующий пример показывает, что это не всегда так.

*Пример 7.3.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ .

Здесь (1,1) – единственная ситуация равновесия, но стратегия 1 первого игрока не является максиминной. Действительно,

$$W(1) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{1j} = 0, \quad W(2) = \min_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2.$$

Стратегия 1 второго игрока также не является максиминной. Если игрок неблагоприятно настроен по отношению к партнеру, то он может нарушить соглашение и вместо равновесной стратегии выбрать максиминную. В результате он получит тот же выигрыш 2, что и в ситуации равновесия, а партнер получит 0.

Всегда ли в игре существует ситуация равновесия? В общем случае ответ – отрицательный, поскольку, например, в антагонистической игре не всегда существует седловая точка. Приведем теорему существования ситуации равновесия в игре многих лиц, которая является обобщением теоремы 1.3. Предварительно сформулируем топологическую теорему о *неподвижной точке*.

**Теорема 7.1 (Брауэр).** Пусть  $f : S \rightarrow S$  – непрерывное отображение в себя выпуклого компакта  $S$  евклидова пространства. Тогда у него существует неподвижная точка  $\bar{s} : f(\bar{s}) = \bar{s}$ .

Отметим, что все условия теоремы существенны. Например, если множество  $S$  – невыпуклое, то утверждение теоремы может быть неверным. Действительно, если  $S$  – окружность, а  $f$  – ее поворот на угол  $\alpha < 2\pi$ , то  $f$  неподвижной точки не имеет.

**Теорема 7.1.** Пусть в игре многих лиц  $\Gamma$  множества  $S^a$ ,  $a \in A$ , – выпуклые компакты евклидовых пространств. Предположим, что каждая функция  $u^a(s)$  непрерывна на  $S$  и вогнута по  $s^a$  при любых фиксированных  $s^b$ ,  $b \neq a$ . Тогда в игре  $\Gamma$  существует ситуация равновесия.

Рассмотрим метод поиска ситуации равновесия с использованием множеств наилучших ответов  $S^a(s^b, b \neq a) = \text{Arg} \max_{s^a \in S^a} u^a(s)$ . Он состоит в решении системы включений  $\bar{s}^a \in S^a(\bar{s}^b, b \neq a)$ ,  $a \in A$ . В случае, когда у игроков существуют непрерывные функции наилучшего ответа  $f^a$  (см. первую часть доказательства теоремы 7.2), система включений эквивалентна системе уравнений  $f^a(\bar{s}^b, b \neq a) = \bar{s}^a$ ,  $a \in A$ .

*Пример 7.4.* Найдем все ситуации биматричной игры  $\Gamma$  :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \underline{3} & \underline{5} & -1 \\ \underline{4} & -2 & 3 & \underline{4} \\ 2 & 1 & \underline{5} & \underline{4} \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 5 & 4 & \underline{7} \\ 4 & \underline{5} & \underline{5} & 4 \\ -3 & \underline{6} & \underline{6} & 2 \\ \underline{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В матрице  $A$  подчеркнуты наибольшие элементы в столбцах, а в матрице  $B$  – наибольшие элементы в строках. Общий подчеркнутый элемент соответствует (3,3) – единственной ситуации равновесия.

*Пример 7.5.* Рассмотрим игру двух лиц  $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$ , где  $X, Y$  и  $F(x, y), G(x, y)$  – множества стратегий и функции выигрыша первого и второго игроков. Пусть

$$X = Y = [0, 1], \quad F(x, y) = -3x^2 + 2y^2 + 7xy, \quad G(x, y) = -(x + y - 1)^2.$$

Функции  $F(x, y)$  и  $G(x, y)$  строго вогнуты по переменным  $x$  и  $y$  соответственно. Функции наилучшего ответа –

$$x(y) = \begin{cases} 7y/6, & 0 \leq y \leq 6/7, \\ 1, & 6/7 < y \leq 1, \end{cases} \quad y(x) = 1 - x.$$

Решая систему  $x(y^0) = x^0$ ,  $y(x^0) = y^0$ , находим  $x^0 = 7/13$ ,  $y^0 = 6/13$ .

*Пример 7.6.* Модель дуополии. Две фирмы выпускают бесконечно-делимый товар для продажи на рынке. Пусть  $x$  и  $y$  – количества товара, выпускаемого первой и второй фирмами, а  $0 < c_1 \leq c_2$  – затраты на его производство, т.е. себестоимости единицы товара для обеих фирм. Цена товара  $p(x + y)$  зависит от общего выпуска  $x + y$ . Функции выигрыша фирм  $F(x, y) = (p(x + y) - c_1)x$  и  $G(x, y) = (p(x + y) - c_2)y$  – прибыли, полученные от реализации произведенной продукции.

Пусть цена на продукцию определяется по следующей формуле  $p(x + y) = K/(x + y)^\alpha$ , где  $1 \geq \alpha > 0$ . Тогда можно считать, что  $X = [0, (K/c_1)^{1/\alpha}]$ , поскольку при  $x > (K/c_1)^{1/\alpha}$  первая фирма терпит убытки при любой стратегии второй фирмы. Аналогично  $Y = [0, (K/c_2)^{1/\alpha}]$ .

Заметим, что для полученной игры выполнены условия теоремы 7.1 и ситуация равновесия  $(x^0, y^0)$  существует. Пусть  $x^0 > 0$ ,  $y^0 > 0$ . Тогда равновесные стратегии  $x^0$ ,  $y^0$  находятся из системы уравнений

$$F'_x(x^0, y^0) = \frac{K}{(x^0 + y^0)^\alpha} - c_1 - \frac{\alpha K x^0}{(x^0 + y^0)^{\alpha+1}} = 0,$$

$$G'_y(x^0, y^0) = \frac{K}{(x^0 + y^0)^\alpha} - c_2 - \frac{\alpha K y^0}{(x^0 + y^0)^{\alpha+1}} = 0.$$

Складывая уравнения, находим сначала сумму

$$x^0 + y^0 = \left( \frac{(2 - \alpha)K}{c_1 + c_2} \right)^{1/\alpha},$$

а затем

$$(x^0, y^0) = \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)K} \left( \frac{(2 - \alpha)K}{c_1 + c_2} \right)^{(\alpha+1)/\alpha} \left( c_2 + (\alpha - 1)c_1, c_1 + (\alpha - 1)c_2 \right).$$

Поскольку  $y^0 > 0$ , то необходимо  $c_1 + (\alpha - 1)c_2 > 0$ . Если выполнено неравенство  $c_1 + (\alpha - 1)c_2 \leq 0$ , то первая фирма является на рынке монополистом и равновесные стратегии имеют вид:

$$x^0 = \left( \frac{(1 - \alpha)K}{c_1} \right)^{1/\alpha}, \quad y^0 = 0.$$

Перейдем к смешанным расширениям биматричных игр  $\Gamma$ , задаваемых матрицами  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . Смешанные стратегии игроков здесь такие же, как и в матричной игре:  $p \in P$ ,  $q \in Q$ . Ожидаемые выигрыши игроков –

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j, \quad B(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j.$$

Получили смешанное расширение биматричной игры  $\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q), B(p, q) \rangle$ . Множества смешанных стратегий  $P$  и  $Q$  – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функции  $A(p, q)$  и  $B(p, q)$  билинейны. По теореме 7.2 в игре  $\bar{\Gamma}$  существует ситуация равновесия  $(p^0, q^0)$ , которую будем называть *ситуацией равновесия в смешанных стратегиях (или смешанным равновесием по Нэшу)* исходной биматричной игры  $\Gamma$ . Для нее по определению выполнены равенства

$$\max_{p \in P} A(p, q^0) = A(p^0, q^0); \quad \max_{q \in Q} B(p^0, q) = B(p^0, q^0).$$

По теореме 3.1' последние два максимума достигаются на чистых стратегиях. Поэтому справедлива

*Лемма 7.1.* Для того чтобы ситуация  $(p^0, q^0)$  была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры  $\Gamma$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\begin{cases} A(i, q^0) \leq A(p^0, q^0), & i = 1, \dots, m, \\ B(p^0, j) \leq B(p^0, q^0), & j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (*)$$

**Теорема 7.3 (свойство дополняющей нежесткости).** Пусть  $(p^0, q^0)$  – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры  $\Gamma$ . Тогда

- 1)  $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$ ;
- 2)  $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$ .

Положим  $X = \{1, \dots, m\}$ ,  $Y = \{1, \dots, n\}$ .

**Теорема 7.4.** Для того чтобы ситуация  $(p^0, q^0)$  была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры  $\Gamma$ , необходимо и достаточно, чтобы нашлись множества  $X^0 \subseteq X$ ,  $Y^0 \subseteq Y$  и числа  $v_1, v_2$ , для которых выполнены условия

$$\begin{cases} \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1, & i \in X^0, & \sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 \leq v_1, & i \notin X^0, \\ \sum_{j \in Y^0} q_j^0 = 1, & q_j^0 \geq 0, & j \in Y^0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, & j \in Y^0, & \sum_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} \leq v_2, & j \notin Y^0, \\ \sum_{i \in X^0} p_i^0 = 1, & p_i^0 \geq 0, & i \in X^0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Теорема 7.4 позволяет сформулировать алгоритм поиска ситуации равновесия в смешанных стратегиях. Ограничимся играми с матрицами размеров  $2 \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \end{pmatrix}.$$

Положим  $X^0 = \{1, 2\}$ ,  $Y^0 = \{j_1, j_2\}$ . Будем перебирать  $j_1, j_2$  и решать системы (7.1) и (7.2). Запишем систему уравнений

$$p_1^0 b_{1j_1} + (1 - p_1^0) b_{2j_1} = v_2, \quad p_1^0 b_{1j_2} + (1 - p_1^0) b_{2j_2} = v_2. \quad (7.3)$$

Пусть ее решение  $p_1^0, v_1$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq p_1^0 \leq 1$ . Проверим для  $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$  условие (\*):

$$p_1^0 b_{1j} + (1 - p_1^0) b_{2j} \leq v_2 \quad \forall j \neq j_1, j_2. \quad (7.4)$$

Если условие (7.4) не выполнено, то перейдем к другой паре  $j_1, j_2$ . Пусть условие (7.4) выполнено. Рассмотрим систему

$$a_{1j_1} q^* + a_{1j_2} (1 - q^*) = v_1, \quad a_{2j_1} q^* + a_{2j_2} (1 - q^*) = v_1. \quad (7.5)$$

Пусть существует решение  $q^*, v_1$  системы (7.5), удовлетворяющее неравенствам  $0 \leq q^* \leq 1$ <sup>1</sup>. Для стратегии

$$q^0 : q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j = j_1, \\ 1 - q^*, & j = j_2, \\ 0, & j \neq j_1, j_2, \end{cases}$$

условие (\*) вытекает из уравнений (7.5). Итак, при выполнении всех указанных условий  $(p^0, q^0)$  – ситуация равновесия.

Здесь алгоритму можно дать геометрическую интерпретацию. На отрезке  $0 \leq p_1 \leq 1$  строим прямые  $l_j(p_1) = p_1 b_{1j} + (1 - p_1) b_{2j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Точки излома верхней огибающей семейства прямых  $l_j$  соответствуют парам  $j_1, j_2$ , для которых существует решение  $p_1^0, v_2$  системы (7.3), удовлетворяющее неравенствам  $0 \leq p_1^0 \leq 1$  и условию (7.4). Поэтому последовательно перебираем точки верхней огибающей и решаем систему (7.5) с проверкой неравенств  $0 \leq q^* \leq 1$ .

<sup>1</sup>В противном случае переходим к другой паре  $j_1, j_2$ .

Пример 7.6. Пусть  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

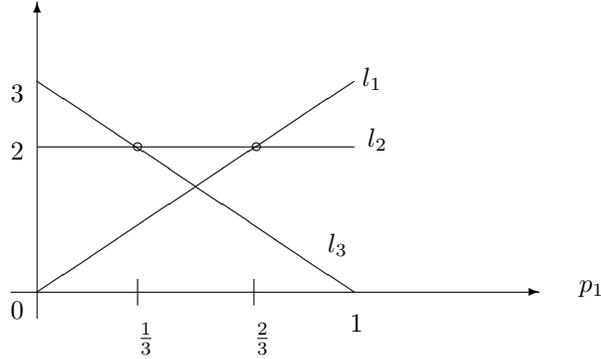


Рис. 7.1

Здесь  $l_1(p_1) = 3p_1$ ,  $l_2(p_1) \equiv 2$ ,  $l_3(p_1) = 3(1 - p_1)$ . Первая точка верхней огибающей (пересечение прямых  $l_2$  и  $l_3$  на рис. 7.1) имеет абсциссу  $p_1^0 = 1/3$ . Рассмотрим систему

$$4q^* + 5(1 - q^*) = v_1, \quad 2q^* + (1 - q^*) = v_1. \quad (7.5)$$

Отсюда находим  $q^* = 2 > 1$ . Переходим ко второй точке огибающей, лежащей на пересечении прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Она имеет абсциссу  $p_1^0 = 2/3$ . Система

$$2q^* + 4(1 - q^*) = v_1, \quad 4q^* + 2(1 - q^*) = v_1 \quad (7.5)$$

имеет решение  $q^* = 1/2$ ,  $v_1 = 3$ . Поэтому  $(p^0, q^0) = ((2/3, 1/3), (1/2, 1/2, 0))$  — искомая ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

*Пример 7.7.* Модель технического контроля за качеством продукции. Завод выпускает автомобили партиями по 100 штук. За каждую автомашину завод получает от концерна 1.3 ед. оплаты, из которых 1 ед. составляют премиальные, а 0.3 ед. предназначены для операций технического контроля (ОТК). Завод (игрок 1) может выпускать партию автомобилей либо с ОТК (стратегия 1), либо без ОТК (стратегия 2), увеличивая сумму премиальных. При использовании первой стратегии итоговая сумма премиальных, полученная заводом за партию, составляет 100 ед., при использовании второй стратегии — 130 ед.

С целью уменьшения производственного брака концерн решил привлечь независимую фирму, осуществляющую технический контроль за качеством продукции. Стоимость проверки автомобиля для фирмы составляет 0.12 ед. Если ОТК заводом не проводится, то автомобиль неисправен с вероятностью  $4/5$ . В случае обнаружения неисправностей завод обязан их устранить, затратив 0.3 ед., и заплатить дополнительно фирме 0.2 ед. из своих премиальных. Фирма (игрок 2) может либо проверить партию (стратегия 1), либо отказаться от ее проверки (стратегия 2).

Выигрышем первого игрока является ожидаемая сумма премиальных, полученная заводом от концерна за партию автомобилей с учетом издержек на ОТК и возможных выплат фирме. Выигрышем второго игрока является ожидаемая сумма выплат, полученных

от завода при проверке партии автомобилей с учетом затрат на эту проверку. Выпишем матрицы игры

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 90 & 130 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, если завод не проводит ТК, а фирма проверяет партию, то средние премиальные равны  $100(0.8(4/5) + 1.3(1/5)) = 90$  ед., а ожидаемая прибыль фирмы составит  $100(0.08(4/5) - 0.12(1/5)) = 4$  ед. Нетрудно видеть, что в данной игре не существует ситуации равновесия в чистых стратегиях. Ситуация равновесия в смешанных стратегиях

$$(p^0, q^0) = ((1/4, 3/4), (3/4, 1/4)).$$

Равновесные стратегии  $p^0$  и  $q^0$  могут быть реализованы в виде «физических смесей»: первый игрок «должен» 25 автомобилей каждой партии выпускать с ОТК, второй игрок должен проверять по 75 автомобилей каждой партии.

**Теорема 7.5.** Пусть некоторая строка матрицы  $A$  строго доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда она входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию первого игрока и ее можно вычеркнуть.

**Теорема 7.5'.** Пусть некоторый столбец матрицы  $B$  строго доминируется выпуклой комбинацией остальных столбцов этой матрицы. Тогда он входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию второго игрока и его можно вычеркнуть.

### Задачи распределения ресурсов

Пусть  $i = 1, \dots, n$ , — номера  $n$  пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс. Через  $f_i(t)$  обозначим функцию, определяющую эффективность от вложения ресурса в количестве  $t$  в  $i$ -й пункт. Вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  задает стратегию распределения ресурса: на  $i$ -й пункт направляется ресурс в количестве  $x_i$ .

Будем рассматривать два вида задач: непрерывные, где ресурс предполагается бесконечно-делимым, и дискретные, где ресурс — штучный, а  $A$  и  $x_i$  — целые числа. Для непрерывной задачи множество стратегий имеет вид

$$X = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

а для дискретной —

$$X' = \left\{ x \in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A, x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\},$$

где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.

## §8. Принцип уравнивания

Рассмотрим следующую непрерывную задачу:

$$\max_{x \in X} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0). \quad (8.1)$$

Здесь оперирующая сторона стремится максимизировать свертку вида  $\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$ , т.е. минимальный эффект от вложения ресурса. Эта цель отвечает социалистическому принципу: «распределить так, чтобы не было бедных». Максиминную стратегию  $x^0$  будем называть *оптимальным распределением ресурса*.

Задачу (8.1) будем рассматривать в предположении, что все функции  $f_i(t)$  непрерывны и возрастают на отрезке  $[0, A]$ . Кроме того, без потери общности будем считать, что

$$f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0).$$

Будем говорить, что первый пункт является слабым: если пунктам не выделяется ресурс, то эффективность на первом пункте будет наименьшей. В следующем утверждении сформулировано условие оптимальности, известное в литературе как *принцип уравнивания*.

**Теорема 8.1 (Гермейер).** В сделанных предположениях пусть  $x^0$  — оптимальное распределение ресурса в задаче (8.1). Тогда для  $x^0$  выполнено следующее необходимое и достаточное условие: найдется такое целое  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , что

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0), & i = 1, \dots, k-1, \\ x_i^0 = 0, & i = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (8.2)$$

Если  $f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_n(0)$ , то  $k = n$ . Во всех случаях оптимальное распределение  $x^0$  единственно.

*Замечание.* Оптимальное распределение ресурса состоит в том, что он выделяется нескольким слабым пунктам с выравниванием эффективностей по этим пунктам.

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения ресурса. Берем последовательно  $k = n, n-1, \dots, 1$  и решаем систему уравнений

$$f_i(x_i^0) = C, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k x_i^0 = A$$

относительно неизвестных  $C, x_1^0, \dots, x_k^0$ . Если полученное решение имеет неотрицательные компоненты  $x_i^0$  и при  $k < n$  выполнено неравенство  $C < f_{k+1}(0)$ , то  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0, 0, \dots, 0)$  — оптимальное распределение ресурса. В противном случае уменьшаем значение  $k$  и вновь решаем систему.

*Пример 8.1.* Оптимизация структуры страхового портфеля.

Страховая компания проводит массовое страхование по нескольким видам рисков. Пусть  $x_i$  — число договоров, заключенных по  $i$ -му виду страхования, а  $\xi_{ij}$  — случайная величина иска по  $j$ -му договору,  $j = 1, \dots, x_i$ . Будем считать, что случайные величины  $\xi_{ij}$  независимы, каждая из них имеет математическое ожидание  $m_i$  и дисперсию  $V_i$ . Величина  $m_i$  — это *нетто-премия*, т.е. стоимость полиса без надбавок за риск и на текущие расходы компании. Пусть  $f_i$  — относительная рискованная надбавка, которая взимается с целью обезопасить страховую компанию от разорения. Стоимость полиса при этом возрастает до величины  $m_i(1 + f_i)$ . Пусть  $\xi_i = \sum_{j=1}^{x_i} \xi_{ij}$  — суммарный иск со стороны клиентов по  $i$ -му виду

страхования. Надбавка  $f_i$  выбирается из условия, состоящего в том, что событие<sup>1</sup>

$$\{\xi_i \geq x_i m_i (1 + f_i)\} = \left\{ Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_i - x_i m_i}{\sqrt{x_i V_i}} \geq \frac{x_i m_i f_i}{\sqrt{x_i V_i}} \right\}$$

должно выполняться с малой вероятностью  $\alpha$ . При больших  $x_i$  можно считать, что случайная величина  $Y_i$  приближенно имеет стандартное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Указанное событие выполнено с требуемой вероятностью  $\alpha$ , если правая часть неравенства равна  $y_{1-\alpha}$  — корню уравнения  $1 - \Phi(y) = \alpha$ , где

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx$$

— функция распределения нормального закона. Отсюда получаем формулы для относительных рисков надбавок по каждому виду страхования

$$f_i(x_i) = \frac{\sqrt{V_i} y_{1-\alpha}}{\sqrt{x_i m_i}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть  $A$  — общее число договоров. Вектор  $x \in X$  отражает структуру страхового портфеля. Здесь допускается нецелое число договоров  $x_i$ . Рассмотрим задачу  $\min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$ .

Чем меньше наибольшая относительная рисковая надбавка, тем более конкурентно-способна страховая компания.

Перейдем теперь к задаче дискретного максимина:

$$\max_{x \in X'} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*). \quad (8.3)$$

Здесь  $f_i(t)$  — возрастающие функции целого аргумента.

Положим  $I = \{1, \dots, n\}$  и для  $x \in X'$  определим множество

$$I(x) = \text{Arg} \min_{i \in I} f_i(x).$$

Обозначим через  $|I(x)|$  число элементов множества  $I(x)$ .

**Теорема 8.2.** Пусть  $x^*$  — такое оптимальное распределение ресурсов задачи (8.3), при котором величина  $|I(x^*)|$  минимальна среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо выполнено условие:

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^* - 1). \quad (8.4)$$

Кроме того, (8.4) является достаточным условием оптимальности.

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения в задаче (8.3). Пусть  $x^{(1)}$  — произвольное распределение ресурса. Допустим, что алгоритм проработал до  $k$ -го шага

<sup>1</sup>Его называют *техническим разорением* по  $i$ -му виду страхования.

( $k \geq 1$ ) и мы получили распределение  $x^{(k)}$ . Если для  $x^{(k)}$  выполнено условие (8.4), то по теореме 8.2 оно и будет искомым оптимальным распределением. Допустим, что условие (8.4) не выполнено. Тогда найдется такой номер  $j$ , что  $x_j^{(k)} > 0$  и

$$f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}) = f_l(x_l^{(k)}).$$

Определим новое распределение  $x^{(k+1)}$ :

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j, \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l, \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l. \end{cases}$$

Могут возникнуть два случая:

1)  $|I(x^{(k)})| = 1$ . Тогда

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}).$$

2)  $|I(x^{(k)})| > 1$ . Тогда

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^{(k)}), \text{ но } |I(x^{(k+1)})| < |I(x^{(k)})|.$$

Таким образом, на каждом шаге алгоритма либо увеличивается значение функции минимума, либо сокращается множество  $I(x^{(k)})$ . Отсюда следует, что алгоритм закончит работу через конечное число шагов, поскольку множество  $X'$  содержит конечное число элементов.

На практике в качестве начального берут распределение  $x^{(1)}$ , близкое к оптимальному распределению соответствующей непрерывной задачи.

*Пример 8.1.* Рассмотрим задачу нахождения

$$\max_{x \in X'} \min_{1 \leq i \leq 4} ix_i^2 = \min_{1 \leq i \leq 4} i(x_i^*)^2,$$

где

$$X' = \left\{ x \in E^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 10, x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Сначала решим соответствующую непрерывную задачу:

$$\max_{x \in X} \min_{1 \leq i \leq 4} ix_i^2 = \min_{1 \leq i \leq 4} i(x_i^0)^2,$$

где

$$X = \left\{ x \in E^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 10, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Здесь  $f_i(t) = it^2$ ,  $f_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . По теореме 8.1 оптимальное распределение  $x^0$  удовлетворяет системе уравнений

$$ix_i^2 = C, i = 1, 2, 3, 4, \sum_{i=1}^4 x_i = 10.$$

Отсюда  $x_i^0 = \sqrt{C/i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , где  $\sqrt{C}$  находится из последнего уравнения:

$$\sqrt{C} = 10 \left( \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{i}} \right)^{-1}.$$

Таким образом,  $x_1^0 \approx 3.59$ ,  $x_2^0 \approx 2.54$ ,  $x_3^0 \approx 2.07$ ,  $x_4^0 \approx 1.8$ . Для решения исходной задачи возьмем начальное распределение  $x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$ . Оно получено последовательным округлением компонент вектора  $x^0$ . Все вычисления сведем в таблицу

$i$	$x_i^{(1)}$	$i(x_i^{(1)})^2$	$i(x_i^{(1)} - 1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i(x_i^{(2)})^2$	$i(x_i^{(2)} - 1)^2$
1	4	16	9	3	9	4
2	3	18	8	3	18	8
3	2	12	3	2	12	3
4	1	4	0	2	16	4

Здесь  $I(x^{(1)}) = \{4\}$  и условие (8.4) для  $x^{(1)}$  не выполнено при  $j = 1$ . Далее,  $I(x^{(2)}) = \{1\}$  и условие (8.4) выполнено. Итак,  $x^{(2)}$  – оптимальное распределение ресурса.

## §9. Оптимизация суммарного эффекта

Рассмотрим еще одну непрерывную задачу

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0). \quad (9.1)$$

Пример ее интерпретации. Инвестор распределяет капитал  $A$  по  $n$  проектам, где  $f_i(t)$  – прибыль, получаемая от вложения капитала  $t$  в  $i$ -й проект. В отличие от задачи (8.1), функции  $f_i(t)$  – необязательно возрастающие. Предположим, что они дифференцируемы на отрезке  $[0, A]$ . Следующее утверждение в литературе известно как *лемма Гиббса*.

**Теорема 9.1 (Гиббс).** В сделанных предположениях пусть  $x^0$  – оптимальное распределение ресурса в задаче (9.1). Тогда найдется такое число  $\lambda$ , что выполнено следующее необходимое условие:

$$\begin{cases} f'_i(x_i^0) = \lambda, & x_i^0 > 0, \\ f'_i(x_i^0) \leq \lambda, & x_i^0 = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Если функции  $f_i(t)$  вогнуты, то (9.2) является достаточным условием оптимальности. Если дополнительно известно, что функции  $f_i(t)$  дважды дифференцируемы и

$$f'_1(0) \geq f'_2(0) \geq \dots \geq f'_n(0), \quad f''_i(0) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.3)$$

то найдется такой номер  $l$ , что

$$x_i^0 > 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad x_i^0 = 0, \quad i = l + 1, \dots, n. \quad (9.4)$$

*Пример 9.1.* Задача поиска объекта.

Объект находится в одной из  $n$  возможных непересекающихся областей с номерами  $i = 1, \dots, n$ . Если он находится в  $i$ -й области и поиск в ней ведется в течение времени  $t$ , то условная вероятность его обнаружения равна  $1 - e^{-\mu_i t}$ , где  $\mu_i > 0$ . Обозначим через  $p_i$  известную априорную вероятность нахождения объекта в  $i$ -й области. Пусть  $A$  – общее время поиска объекта. Стратегия поиска  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  означает, что объект в области  $i$  ищется в течение времени  $x_i$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n p_i(1 - e^{-\mu_i x_i})$  – полная вероятность обнаружения объекта, которую необходимо минимизировать.

Определим функции  $f_i(t) = p_i(1 - e^{-\mu_i t})$  и решим задачу (9.1). Заметим, что  $f_i''(t) = -p_i \mu_i^2 e^{-\mu_i t} < 0$ . Следовательно, функции  $f_i(t)$  являются вогнутыми. Упорядочим значения производных в нуле  $f_i'(0) = p_i \mu_i$ :

$$p_1 \mu_1 \geq p_2 \mu_2 \geq \dots \geq p_n \mu_n.$$

В соответствии с утверждением (9.4) леммы Гиббса найдется такой номер  $l$ , что

$$x_i^0 > 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad x_i^0 = 0, \quad i = l + 1, \dots, n.$$

Запишем условие (9.2)

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = \lambda, & i = 1, \dots, l, \\ f_i(x_i^0) \leq \lambda, & i = l + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x_i^0 = \frac{\ln(p_i \mu_i)}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \ln \lambda, \quad i = 1, \dots, l. \quad (9.5)$$

Складывая эти равенства, получим

$$A = \sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - \ln \lambda \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k}.$$

Отсюда найдем  $\ln \lambda$  и после подстановки в (9.5) находим

$$x_i^0 = \frac{\ln(p_i \mu_i)}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \left( \sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - A \right) \left( \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Поскольку произведения  $p_i \mu_i$  упорядочены, для того чтобы компоненты  $x_i^0$ ,  $i = 1, \dots, l$ , были положительными, достаточно потребовать выполнения неравенства  $x_l^0 > 0$  или

$$A > \sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_l \mu_l) \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k}. \quad (9.6)$$

Необходимо также проверить неравенства

$$f_i(0) = p_i \mu_i \leq \lambda, \quad i = l + 1, \dots, n,$$

или  $p_{l+1}\mu_{l+1} \leq \lambda$ , поскольку  $p_i\mu_i$  упорядочены. Последнее неравенство прологарифмируем и подставим выражение для

$$\ln \lambda = \left( \sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - A \right) \left( \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1}.$$

В результате получим

$$\ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k} \leq \sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - A.$$

Добавим к обеим частям выражение  $\ln(p_{l+1}\mu_{l+1})(\mu_{l+1})^{-1}$  и в результате получим неравенство

$$A \leq \sum_{k=1}^{l+1} \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{\mu_k}. \quad (9.7)$$

Итак, номер  $l$  выбирается из условий (9.6), (9.7), либо  $l = n$ . Заметим, что неравенство (9.6) выполнено при  $l = 1$ . Нетрудно проверить, что выражение

$$\sum_{k=1}^l \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_l\mu_l) \sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k}$$

не убывает по  $l$ . Исследование модели полностью завершено.

Рассмотрим дискретный аналог задачи (9.1):

$$\max_{x \in X'} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) \quad (9.8)$$

Здесь  $f_i(t)$  – возрастающие функции целого аргумента. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие вогнутости: если  $x_i > 0$ , то  $f_i(x_i) \geq (f_i(x_i + 1) + f_i(x_i - 1))/2$  или

$$f_i(x_i) - f_i(x_i - 1) \geq f_i(x_i + 1) - f_i(x_i). \quad (9.9)$$

Неравенство (9.9) означает, что разность между значениями функции  $f_i$  в соседних точках не возрастает.

В следующей лемме сформулирован дискретный аналог свойства графика вогнутой дифференцируемой функции располагаться ниже проведенной к нему касательной.

*Лемма 9.1.* Для функции  $f_i(t)$ , удовлетворяющей условию (9.9), справедливы неравенства

$$f_i(t) - f_i(t_0) \leq (f_i(t_0 + 1) - f_i(t_0))(t - t_0), \quad t > t_0 \quad (9.10)$$

$$f_i(t) - f_i(t_0) \leq (f_i(t_0) - f_i(t_0 - 1))(t - t_0), \quad t < t_0 \quad (9.11)$$

**Теорема 9.2 (Гросс).** В сделанных предположениях пусть  $x^*$  – оптимальное распределение ресурса в задаче (9.8). Тогда для  $x^*$  выполнено необходимое и достаточное условие

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)]. \quad (9.12)$$